

Keksinleikkaukuvauksen paine

LuK-tutkielma

Asta Ruhkala

2577395

Matemaattisten tieteiden laitos

Oulun yliopisto

Syksy 2020

Sisältö

Johdanto	2
1 Hausdorff-metriikka	3
2 Iteroitu funktiosysteemi	7
3 Keksinleikkaus	14
3.1 Keksinleikkaus	14
3.2 Rajoitettu heilahtelu	18
4 Paine	21
Lähdeluettelo	27

Johdanto

Tässä tutkielmassa käsitellään keksinleikkauskuvauksia ja erityisesti määritellään keksinleikkauskuvauksen paine sekä todistetaan tämän paineen olemassaolo.

Tutkielman alussa tutustutaan iteroituihin funktiosysteemeihin, joiden avulla voidaan muodostaa erilaisia fraktaaleja melko yksinkertaisesti. Osoitetaan, että iteroidulla funktiosysteemillä on attraktori, johon se suppenee iteroidessa. Tätä todistusta varten määritellään Hausdorff-metriikka ja tarkastellaan kontraktioiden ominaisuuksia.

Tietyissä tilanteissa voidaan löytää dynaaminen systeemi, jonka repelleri vastaa iteroidun funktiosysteemin attraktoria. Tällöin iteroidun funktiosysteemin muodostamaa fraktaalua voidaan tutkia myös dynaamisen systeemin avulla. Tällaista dynaamista systeemiä kutsutaan keksinleikkauskuvaukseksi.

Tutkielman viimeisessä osiossa määritellään keksinleikkauskuvauksen paine. Paineen avulla saadaan tietoa attraktorin rakenteesta, kuten sen dimensioista. Keksinleikkauskuvaus on erityisen käytännöllinen iteroitujen funktiosysteemien epälineaaristen tapausten tutkimiseen, jolloin esimerkiksi dimension laskeminen ei ole yhtä suoraviivaista kuin lineaarisissa tapauksissa.

Läpi tutkielman käytetään esimerkkinä Cantorin joukkoa, joka on ehkä yksi tunnetuimmista fraktaaleista. Tutkielmassa muodostetaan Cantorin joukko käyttäen iteroitua funktiosysteemiä ja etsitään tälle vastaava dynaaminen systeemi. Lopuksi lasketaan paine tälle dynaamiselle systeemille.

Tutkielmassa on käytetty pääasiassa teosta [3]. Osiot Hausdorff-metriikasta ja iteroiduista funktiosysteemeistä on rakennettu pitkälti kuten kirjassa [4]. Lisäksi näissä osioissa on käytetty teoksia [1], [2] ja [3]. Esimerkit ovat kirjoista [2] ja [3], lukuun ottamatta esimerkkiä 4.6, joka on omani.

1 Hausdorff-metriikka

Tässä osiossa määritellään metriikka eli etäisyysfunktio. Erityisesti esitellään Hausdorff-metriikka, joka kuvaa joukkojen välisiä etäisyyksiä. Lisäksi määritellään täydellinen metrinen avaruus, jonka avulla päästään käsiksi joukkojen suppenevuuteen.

Määritelmä 1.1. Olkoon X joukko. Kuvaus $d : X \times X \rightarrow [0, \infty[$ on metriikka, jos se toteuttaa seuraavat ominaisuudet

- i)* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- ii)* $d(x, y) = d(y, x)$
- iii)* $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

kaikilla $x, y, z \in X$. Tällöin pari (X, d) on metrinen avaruus.

Määritelmä 1.2. Olkoon X joukko. Joukon halkaisija $\text{diam}(X)$ on suurin joukon pisteiden välinen etäisyys eli

$$\text{diam}(X) = \sup\{d(x, y) : x, y \in X\}.$$

Määritelmä 1.3. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja olkoon S avaruuden X epätyhjien kompaktien osajoukkojen luokka. Määritellään pisteen $a \in X$ etäisyys joukosta $B \in S$ asettamalla

$$d(a, B) = \min\{d(a, b) : b \in B\}.$$

Määritellään joukon A etäisyys joukosta B asettamalla

$$d(A, B) = \max\{d(a, B) : a \in A\}.$$

Tällä määritelmällä $d(A, B) = d(B, A)$ ei toteudu kaikilla $A, B \in S$, joten kuvaus d ei ole metriikka luokassa S . Määritellään siis Hausdorff-kuvaus ja osoitetaan, että se on metriikka luokassa S .

Määritelmä 1.4. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Olkoon S avaruuden X epätyhjien kompaktien osajoukkojen luokka. Määritellään Hausdorff-kuvaus d_H luokassa S

$$d_H(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}, \text{ missä } A, B \in S.$$

Hausdorff-kuvaus voidaan määritellä intuitiivisemmin myös etäisyytenä, jolla joukkoja pitäisi laajentaa, jotta ne kuuluvat toisiinsa. Siis

$$d_H(A, B) = \inf\{\delta : A \subset B_\delta \text{ ja } B \subset A_\delta\},$$

missä A_δ on joukon $A \in S$ δ -ympäristö

$$A_\delta = \{x \in X : d(x, a) \leq \delta \text{ jollakin } a \in A\}.$$

Lause 1.5. Hausdorff-metriikan määritelmät $d_H(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}$ ja $d_H(A, B) = \inf\{\delta : A \subset B_\delta \text{ ja } B \subset A_\delta\}$ ovat ekvivalentteja.

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$. Jos $d_H(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\} \leq \varepsilon$, niin $d(A, B) \leq \varepsilon$ ja $d(B, A) \leq \varepsilon$. Riittää siis osoittaa, että $d(A, B) \leq \varepsilon \Leftrightarrow A \subset B_\varepsilon$.
Nyt

$$\begin{aligned} d(A, B) &\leq \varepsilon \\ \Leftrightarrow d(a, B) &\leq \varepsilon \text{ kaikille } a \in A \\ \Leftrightarrow a &\in B_\varepsilon \text{ kaikille } a \in A \\ \Leftrightarrow A &\subset B_\varepsilon \end{aligned}$$

□

Tutkielmassa käytetään molempia määritelmiä Hausdorff-metriikkaan liittyvien tuloksien todistamisessa tilanteesta riippuen.

Lause 1.6. Hausdorff-kuvaus on metriikka luokassa S .

Todistus. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $A, B \in S$. Osoitetaan ensiksi, että $d_H : S \times S \rightarrow [0, \infty[$.

Määritelmästä seuraa suoraan, että $d_H(A, B) \geq 0$. Koska X on kompakti, se on myös rajoitettu, jolloin on olemassa halkaisija $\text{diam}(X) = r < \infty$. Tällöin r -ympäristö $A_r = X$, joten $d_H(A, B) < \infty$. Siis $0 \leq d_H(A, B) < \infty$.

i) Todistetaan, että $A = B$, jos ja vain jos $d_H(A, B) = 0$.

Olkoon $A = B$ tällöin $A \subset B_\varepsilon$ ja $B \subset A_\varepsilon$ kaikilla $\varepsilon > 0$. Tällöin $d_H(A, B) = 0$.
Olkoon $d_H(A, B) = 0$. Jos $x \in A$, niin $x \in B_\varepsilon$ kaikilla $\varepsilon > 0$. Koska B on kompakti, se on myös suljettu, joten $x \in B$. Siis $A \subseteq B$. Vastaavasti saadaan, että $B \subseteq A$, joten $A = B$.

ii) Määritelmästä seuraa suoraan, että järjestyksen vaihtaminen on sallittua eli $d_H(A, B) = d_H(B, A)$.

iii) Todistetaan kolmioepäyhtälö.

Olkoon $A, B, C \in S$ ja $\varepsilon > 0$. Jos $x \in A$, on olemassa sellainen $z \in B$, että $d(x, z) < d_H(A, B) + \varepsilon$. Vastaavasti on sellainen $y \in C$, että $d(z, y) < d_H(B, C) + \varepsilon$.

Koska d on metriikka, kolmioepäyhtälön nojalla

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < d_H(A, B) + d_H(B, C) + 2\varepsilon.$$

Tällöin $A \subset C_\delta$, missä $\delta = d_H(A, B) + d_H(B, C) + 2\varepsilon$. Vastaavasti $C \subset A_\delta$.
Siis

$$d_H(A, C) < d_H(A, B) + d_H(B, C) + 2\varepsilon.$$

Koska epäyhtälö pätee kaikille $\varepsilon > 0$

$$d_H(A, C) \leq d_H(A, B) + d_H(B, C).$$

□

Määritelmä 1.7. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja piste $x \in X$. Jono (x_n) suppenee kohti pistettä x , jos kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen $n_0 \in \mathbb{N}$, että $d(x_n, x) < \varepsilon$ aina, kun $n \geq n_0$.

Määritelmä 1.8. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Jono (x_n) on Cauchy-jono, jos kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen $n_0 \in \mathbb{N}$, että $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ aina, kun $n, m \geq n_0$.

Määritelmä 1.9. Metrinen avaruus (X, d) on täydellinen, jos kaikki sen Cauchy-jonot suppenevat.

Lause 1.10. Jos (X, d) on täydellinen metrinen avaruus, niin myös (S, d_H) on täydellinen metrinen avaruus. Tällöin Cauchy-jono (A_n) suppenee joukkoon A Hausdorff-metriikassa. Määritellään joukko A seuraavasti:

$$A = \{x \in X : x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, x_n \in A_n\}.$$

Todistus on esitetty kirjassa [4] Theorem 2.1.12. sivulla 67.

Lause 1.11. Olkoon (X, d) täydellinen metrinen avaruus. Olkoot

$$X \supset A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$$

epätyhjiä, sisäkkäisiä, suljettuja ja rajoitettuja joukon X osajoukkoja. Jos halkaisija $\text{diam}(A_n) \rightarrow 0$ kun $n \rightarrow \infty$, niin

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x\} \text{ jollekin } x \in X.$$

Todistus. Koska joukot A_n ovat epätyhjiä, jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ löytyy piste $a_n \in A_n$. Todistetaan, että jono $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ on Cauchy-jono, jolloin se suppenee kohti raja-arvoa x , sillä (X, d) on täydellinen metrinen avaruus.

Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Valitaan sellainen $N \in \mathbb{N}$, että $\text{diam}(A_n) < \varepsilon$ kaikilla $n \geq N$. Koska oletettiin, että $\text{diam}(A_n) \rightarrow 0$, tällainen N on olemassa. Nyt kaikille $n, m \geq N$ pätee

$$a_m \in A_m \subset A_N \text{ ja } a_n \in A_n \subset A_N.$$

ja siten $d(a_n, a_m) \leq \text{diam}(A_N) < \varepsilon$. Siis jono $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ on Cauchy-jono, jolloin raja-arvo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ on olemassa, sillä (X, d) on täydellinen metrinen avaruus. Olkoon tämä raja-arvo x .

Nyt tulee osoittaa, että x kuuluu joukkojen leikkaukseen. Tämän osoittamiseksi riittää näyttää, että x kuuluu mielivaltaisesti valittuun joukkoon A_m , jolloin se kuuluu myös joukkojen leikkaukseen.

Kun $n \geq m$, jonon $(a_n)_{n=m}^\infty$ kaikki alkiot kuuluvat joukkoon A_m , sillä $a_n \in A_n \subset A_m$. Siis myös raja-arvo x kuuluu joukkoon A_m , koska kaikki joukot ovat suljettuja. Tämä pätee kaikille $m \in \mathbb{Z}^+$, joten $x \in \bigcap_{n=1}^\infty A_n$.

Osoitetaan, että raja-arvo x on leikkauksen ainoa alkio. Olkoon joukossa toinen alkio $y \in \bigcap_{n=1}^\infty A_n$, jolloin $y \in A_n$. Tällöin

$$0 \leq d(x, y) \leq \text{diam}(A_n) \rightarrow 0 \text{ kun } n \rightarrow \infty.$$

Siis $d(x, y) = 0$ eli $x = y$, joten $\bigcap_{n=1}^\infty A_n = \{x\}$. □

2 Iteroitu funktiosysteemi

Monissa fraktaaleissa toistuu sama kuvio pienemmässä mittakaavassa. Esimerkiksi Cantorin joukossa toistuu sama jana kutistettuna kolmasosaan alkuperäisestä koosta. Iteroidut funktiosysteemit mahdollistavat tällaisten joukkojen muodostamisen melko yksinkertaisella tavalla. Ne koostuvat kontraktioiden eli kutistuskuvausten joukosta, joilla nimensä mukaisesti iteroidaan, jolloin saadaan aikaan toistuva kuvio.

Iteroitujen funktiosysteemien määrittelyä varten käsitellään ensiksi kontraktioita Hausdorff-metrikassa, joka määriteltiin edellisessä kappaleessa. Osoitetaan, että kontraktioilla on kiintopiste eli piste, johon ne suppenevat iteroidessa, jonka jälkeen voidaan laajentaa sama ajatus usean kontraktion systeemille.

Määritelmä 2.1. Olkoon (X, d) täydellinen metrinen avaruus. Kuvaus $f : X \rightarrow X$ on kontraktio, jos on olemassa sellainen luku $0 \leq r < 1$, että

$$d(f(x), f(y)) \leq r \cdot d(x, y) \text{ aina, kun } x, y \in X.$$

Lukua r kutsutaan kontraktiovakioksi.

Huomautus 2.2. Määritelmästä seuraa suoraan kontraktion jatkuvuus.

Määritelmä 2.3. Jonoa $(f^k(x))_{k=0}^{\infty}$ kutsutaan pisteen $x \in X$ radaksi, missä f^k on k :nnes iterointi.

Piste $x \in X$ on kuvauksen f kiintopiste, jos $f(x) = x$.

Lause 2.4. Kontraktiolla $f : X \rightarrow X$ on täsmälleen yksi kiintopiste, johon kaikki radat $\{f^k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ suppenevat.

Todistus. Olkoon $f : X \rightarrow X$ kontraktio ja r sen kontraktiovakio. Olkoon $x \in X$ ja $m, n \in \mathbb{Z}^+$, $m < n$ mielivaltaisia. Koska funktio on kontraktio,

$$d(f^m(x), f^n(x)) = d(f^m(x), f^m(f^{n-m}(x))) \leq r^m d(x, f^{n-m}(x)).$$

Lisäksi voidaan arvioida

$$d(x, f^n(x)) \leq \sum_{k=1}^n d(f^{k-1}(x), f^k(x)) \leq \sum_{k=1}^n r^{k-1} d(x, f(x)) \leq \frac{1}{1-r} d(x, f(x)).$$

Yhdistämällä nämä saadaan

$$d(f^m(x), f^n(x)) \leq \frac{r^m}{1-r} d(x, f(x)).$$

Siis jono $(f^k(x))_{k=0}^{\infty}$ on Cauchy-jono täydellisessä metrisessä avaruudessa (X, d) , joten se suppenee kohti pistettä x_f eli $\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x) = x_f$. Käyttämällä tätä ja kontraktion jatkuvuutta saadaan

$$f(x_f) = f(\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x)) = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{k+1}(x) = x_f,$$

joten x_f on kontraktion f kiintopiste.

Osoitetaan vielä, että kiintopiste on yksikäsitteinen. Olkoon piste $y \in X$ myös funktion kiintopiste. Tällöin $d(x_f, y) = d(f(x_f), f(y)) \leq r d(x_f, y)$. Koska $0 \leq r < 1$, $d(x_f, y) = 0$ eli $x_f = y$. Siis kiintopiste x_f on yksikäsitteinen. \square

Lause 2.5. Olkoon kuvaus $f : X \rightarrow X$ kontraktio metrisessä avaruudessa (X, d) ja olkoon r sen kontraktiovakio. Tällöin myös kuvaus $f : S \rightarrow S$ on kontraktio kontraktiovakiolla r metrisessä avaruudessa (S, d_H) .

Todistus. Koska f on jatkuva kuvaus, se kuvaa kompaktit joukot edelleen kompakteiksi joukoiksi. Tällöin kaikille joukoille $E \in S$ pätee $f(E) := \{f(x) : x \in E\} \in S$, joten kuvaus $f : S \rightarrow S$ on hyvin määritelty. Osoitetaan nyt, että $f : S \rightarrow S$ on kontraktio. Olkoot $A, B \in S$. Tällöin

$$\begin{aligned} d(f(A), f(B)) &= \max\{d(f(a), f(b)) : a \in A, b \in B\} \\ &= \max\{\min\{d(f(a), f(b)) : b \in B\} : a \in A\} \\ &\leq \max\{\min\{rd(a, B) : b \in B\} : a \in A\} = rd(A, B). \end{aligned}$$

Vastaavasti saadaan $d(f(B), f(A)) \leq rd(B, A)$, joten Hausdorff-metriikan määritelmän nojalla $d_H(f(A), f(B)) \leq rd_H(A, B)$. \square

Kun iteroidaan yhdellä kontraktiolla joukkoa $A \in S$, suppenee se siis yhteen kiintopisteeseen. Jotta iteroinnilla saadaan useamman pisteen joukkoja, käytetään kontraktioiden joukkoa, jota kutsutaan iteroiduksi funktiosysteemiksi. Yksittäisen kontraktion tavoin tälle kuvausten joukolle on olemassa kiintopiste, jota kutsutaan attraktoriksi. Määritellään seuraavaksi iteroitu funktiosysteemi ja osoitetaan lemmoja, joiden avulla todistetaan attraktorin olemassaolo.

Määritelmä 2.6. Olkoon (X, d) täydellinen metrinen avaruus ja kuvaus $F_i : X \rightarrow X$ kontraktio kaikille $i = 1, \dots, m$. Iteroitu funktiosysteemi muodostuu kuvausten joukosta $\{F_1, \dots, F_m\}$, missä $m \geq 2$.

Lemma 2.7. Olkoot A, B ja C kompakteja joukon X osajoukkoja. Tällöin

$$d(A \cup B, C) = \max\{d(A, C), d(B, C)\}.$$

Todistus.

$$\begin{aligned} d(A \cup B, C) &= \max\{d(x, C) : x \in A \cup B\} \\ &= \max\{\max\{d(x, C) : x \in A\}, \max\{d(x, C) : x \in B\}\} \\ &= \max\{d(A, C), d(B, C)\} \end{aligned}$$

\square

Lemma 2.8. *Olkoot A, B, C ja D kompakteja joukon X osajoukkoja. Tällöin*

$$d_H(A \cup B, C \cup D) \leq \max\{d_H(A, C), d_H(B, D)\}.$$

Todistus.

$$\begin{aligned} & d_H(A \cup B, C \cup D) \\ &= \max\{d(A \cup B, C \cup D), d(C \cup D, A \cup B)\} \\ &= \max\{\max\{d(A, C \cup D), d(B, C \cup D)\}, \max\{d(C, A \cup B), d(D, A \cup B)\}\} \\ &\quad (\text{lemman 2.7 nojalla}) \\ &\leq \max\{\max\{d(A, C), d(B, D)\}, \max\{d(C, A), d(D, B)\}\} \\ &= \max\{d_H(A, C), d_H(B, D)\}. \end{aligned}$$

□

Osoitetaan nyt, että iteroidun funktiosysteemin kontraktioiden yhdiste on kontraktio, jolloin voidaan osoittaa, että funktiosysteemillä on kiintopiste.

Lause 2.9. *Olkkoon $\{F_1, \dots, F_m\}$ iteroitu funktiosysteemi metriikassa (X, d) . Määritellään kuvaus $F : S \rightarrow S$ kuvausten yhdisteenä*

$$F(A) = \bigcup_{i=1}^m F_i(A) \text{ kun } A \in S.$$

Tällöin kuvaus F on kontraktio Hausdorff-metriikassa (S, d_H) ja sillä on kontraktiiovakio $r = \max\{r_i : 1 \leq i \leq m\}$.

Todistus. Jokainen kuvaus F_i kuvaa kompaktin joukon $A \in S$ kompaktiksi joukoksi $F_i(A) \in S$. Kompaktien joukkojen äärellinen yhdiste on kompakti, joten myös $F(A) = \bigcup_{i=1}^m F_i(A) \in S$ aina, kun $A \in S$. Siis kuvaus $F : S \rightarrow S$ on hyvin määritelty. Nyt

$$\begin{aligned} d_H(F(A), F(B)) &= d_H\left(\bigcup_{i=1}^m F_i(A), \bigcup_{i=1}^m F_i(B)\right) \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq m} d_H(F_i(A), F_i(B)) \quad (\text{lemman 2.8 nojalla}) \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq m} (r_i(d_H(A, B))) \leq \left(\max_{1 \leq i \leq m} r_i\right) d_H(A, B) \\ &= r d_H(A, B). \end{aligned}$$

Siis $d_H(F(A), F(B)) \leq r d_H(A, B)$, missä $r < 1$, sillä $r_i < 1$ kaikilla i eli kuvaus F on kontraktio. \square

Lause 2.10. *Olkoon $\{F_1, \dots, F_m\}$ iteroitu funktiosysteemi metrisessä avaruudessa (X, d) ja funktio $F : S \rightarrow S$ määritelty kuten lauseessa 2.9. Olkoon $A \in S$. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen epätyhjä kompakti joukko $E \in S$, joka on invariantti kuvausten F_i suhteen eli*

$$E = F(E) = \bigcup_{i=1}^m F_i(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} F^k(A).$$

Edelleen, jos joukko $A \in S$ on sellainen, että $F_i(A) \subset A$ kaikille $i = 1, \dots, m$,

$$E = \bigcap_{k=0}^{\infty} F^k(A).$$

Joukkoa E kutsutaan iteroidun funktiosysteemin attraktoriksi.

Todistus. Lauseen 2.9 nojalla F on kontraktio, joten siihen voidaan soveltaa lausetta 2.4. Lauseen mukaan kuvauksella F on yksikäsitteinen kiintopiste $E \in S$, jolle

$$E = F(E) = \bigcup_{i=1}^m F_i(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} F^k(A).$$

Olkoon joukko $A \in S$ sellainen, että $F_i(A) \subset A$ kaikilla i . Todetaan rekursiivisesti

$$F^k(A) \subset F^{k-1}(A) \subset \dots \subset F(A) \subset A,$$

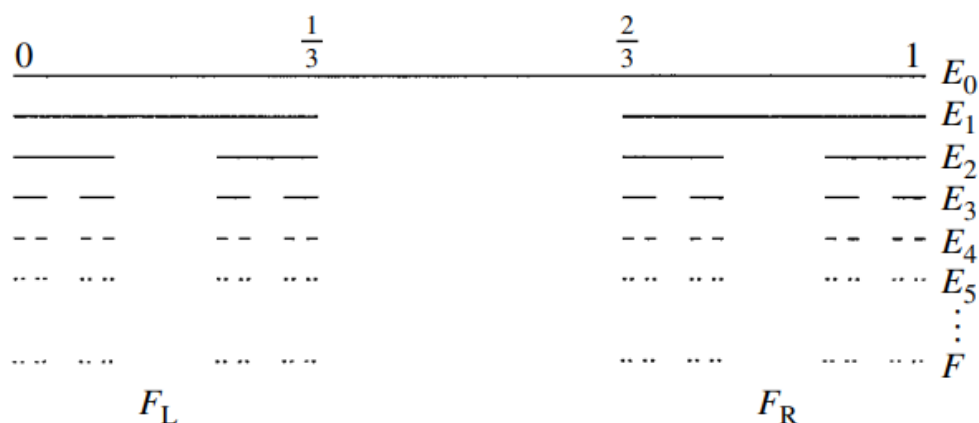
jolloin $F^k(A)$ on epätyhjien kompaktien sisäkkäisten joukkojen muodostama vähenevä jono, joten on olemassa epätyhjä kompakti leikkaus $E = \bigcap_{k=0}^{\infty} F^k(A)$. Koska $F^k(A)$ on vähenevä jono, $E = F(E)$ eli E on kuvauksen F suhteen invariantti. Koska lauseen 2.4 nojalla attraktori on yksikäsitteinen, on leikkaus $\bigcap_{k=0}^{\infty} F^k(A)$ iteroidun funktiosysteemin attraktori. \square

Esimerkki 2.11. Muodostetaan Cantorin joukko käyttämällä iteroitua funktiosysteemiä $\{F_L, F_R\}$, missä $F_L, F_R : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$:

$$F_L(x) = \frac{1}{3}x \text{ ja } F_R(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

Kuvaukset antavat kolmasosaksi skaalatun kopion alkuperäisestä joukosta. Lisäksi F_R siirtää joukkoa $\frac{2}{3}$ verran. Iteroimalla näillä funktioilla saadaan Cantorin joukko. Kuvassa 1 on esitetty viisi ensimmäistä iterointia sekä Cantorin joukko F .

Kuvasta nähdään, että kuvaukset antavan oikean ja vasemman puolen Cantorin joukosta F ja ne ovat kertoimella $\frac{1}{3}$ skaalattuja kopioita joukosta F , jolloin $F = F_L(F) \cup F_R(F)$. Lauseen 2.10 mukaisesti Cantorin joukko F on siis iteroidun funktiosysteemin $\{F_L, F_R\}$ attraktori.



Kuva 1: Cantorin joukko. Alkuperäinen kuva [2, Figure 0.1]

Määritelmä 2.12. Olkoon $\{F_1, \dots, F_m\}$ iteroitu funktiosysteemi ja joukko E sen attraktori. Olkoon I_k joukko jonoja

$$I_k = \{(i_1, \dots, i_k) : i_j \in \{1, 2, \dots, m\} \text{ ja } 1 \leq j \leq k\},$$

missä I_0 on tyhjä jono ja $I_\infty = \{(i_1, i_2, \dots) : i_j \in \{1, 2, \dots, m\}\}$.

Merkitään kaikkien näiden joukkojen yhdistettä

$$I = \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k.$$

Olkoon joukko $A \in S$ sellainen, että $F_i(A) \subset A$ kaikille i , jolloin $F(A) \subset A$.

Nyt

$$F^k(A) = \bigcup_{I_k} F_{i_1} \circ \dots \circ F_{i_k}(A).$$

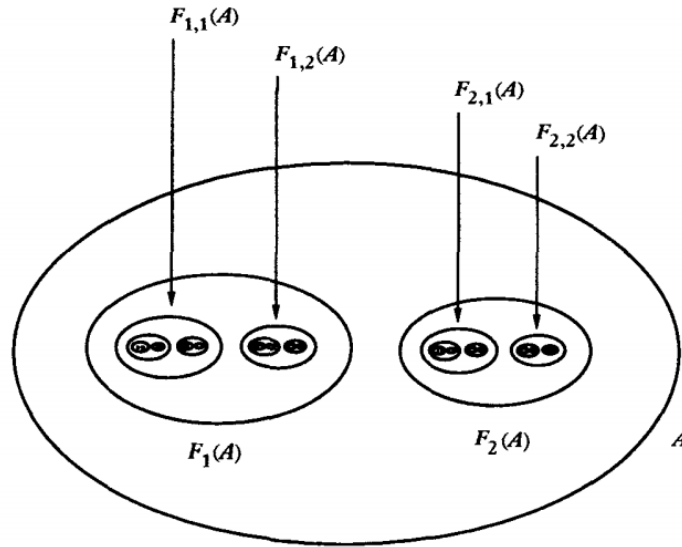
Edelleen $F_{i_1} \circ \dots \circ F_{i_k}(A) \subset F_{i_1} \circ \dots \circ F_{i_{k-1}}(A)$ kaikille $(i_1, \dots, i_k) \in I_k$ ja $\text{diam}(F_{i_1} \circ \dots \circ F_{i_k}(A)) \leq r \text{diam}(F_{i_1} \circ \dots \circ F_{i_{k-1}}(A))$, missä $r = \max\{r_i : 1 \leq i \leq m\}$. Koska kaikille $(i_1, i_2, \dots) \in I_\infty$ $\text{diam}(F_{i_1} \circ \dots \circ F_{i_k}(A)) \rightarrow 0$, kun $k \rightarrow \infty$, lauseen 1.11 nojalla saadaan

$$x_{i_1, i_2, \dots} \equiv \bigcap_{k=0}^{\infty} F_{i_1} \circ \dots \circ F_{i_k}(A).$$

Jokainen piste joukossa E on tällainen leikkaus jollakin jonolla $(i_1, i_2, \dots) \in I_\infty$. Siis koko joukko E voidaan kirjoittaa yhdisteenä

$$E = \bigcup_{I_\infty} \{x_{i_1, i_2, \dots}\}.$$

Kuvassa 2 on esitetty iteroitu funktiosysteemi näillä merkinnöillä.



Kuva 2: Iteroitu funktiosysteemi merkittynä indeksijonoilla. Alkuperäinen kuva [3, Figure 2.6]

Tapauksessa, jossa joukot $F_1(A), \dots, F_m(A)$ ovat erillisiä, jokaiselle joukon pisteelle on olemassa esitys yksikäsitteisen indeksijonon avulla. Tällöin voidaan määritellä kuvaus $f : \bigcup_{i=1}^m F_i(X) \rightarrow X$ asettamalla

$$f(x) = F_i^{-1}(x), \text{ kun } x \in F_i(X)$$

Kuvauksen f käsittely on jossain tilanteissa käytännöllisempää kuin koko funktiosysteemin. Tätä käytetään myös keksinleikkauskuvausten käsittelyssä seuraavassa osiossa, jossa kuvaus määritellään tarkemmin.

3 Keksinleikkaus

3.1 Keksinleikkaus

Tietyissä tilanteissa dynaamisen systeemin repelleri voi vastata edellisessä osiossa määritellyn iteroidun funktiosysteemin attraktoria. Kuten edellisessä osiossa todettiin, iteroitujen funktiosysteemien avulla voidaan muodostaa fraktaaleja, joten nyt myös dynaamisten systeemien avulla voidaan käsitellä näitä fraktaaleja.

Keksinleikkauskuvaus on tällainen dynaaminen systeemi ja sen repelleriä kutsutaan keksileikkausjoukoksi. Repelleri on kuvauksen suhteen invariantti joukko. Pisteet, jotka eivät kuulu repelleriin, katoavat iteroidessa eli nimensä mukaisesti repellerin voi ajatella hylkivän muita pisteitä. Keksinleikkauskuvauselle löytyy vastaava iteroitu funktiosysteemi, jonka attraktori vastaa dynaamisen systeemin repelleriä eli keksinleikkausjoukkoa.

Aiemmin iteroituja funktiosysteemejä käsiteltiin yleisesti täydellisessä metriikassa (X, d) , mutta käsitellään nyt keksinleikkauskuvauksia Euklidisessa avaruudessa $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ eli reaaliakselilla. Tilanteen yksinkertaistamiseksi määritellään keksinleikkaus iteroidulla funktiosysteemillä, jossa on vain kaksi funktiota.

Määritelmä 3.1. Olkoon $X \subset \mathbb{R}$ rajoitettu ja suljettu väli ja X_1 ja X_2 tämän välin erillisiä osavälejä. Olkoon $f : X_1 \cup X_2 \rightarrow X$ keksinleikkauskuvaus, joka kuvaa välit X_1 ja X_2 bijektiivisesti välille X . Lisäksi oletetaan, että kuvauksen f derivaatta on jatkuva ja $|f'(x)| > 1$ kaikille $x \in X_1 \cup X_2$.

Iteroimalla funktiolla f saadaan keksinleikkausjoukko E , joka muodostuu

pisteistä, jotka pysyvät joukossa $X_1 \cup X_2$ iteroidessa. Siis

$$E = \{x \in X : f^k(x) \in X_1 \cup X_2 \text{ kaikille } k = 0, 1, 2, \dots\} = \bigcap_{k=0}^{\infty} f^{-k}(X).$$

Selvästi E on invariantti eli $f(E) = E = f^{-1}(E)$, sillä $x \in E$ jos ja vain jos $f(x) \in E$. Edelleen voidaan sanoa, että joukko E on repelleri sillä, jos $x \notin E$, niin jokin iteraatti $f^k(x) \notin X_1 \cup X_2$ eli pisteet, jotka eivät kuulu repelleriin kuvautuvat joukon ulkopuolelle.

Tilanne voidaan määritellä myös käänteisesti iteroidun funktiosysteemin avulla. Koska kuvaus f on bijektiivinen väleillä X_1 ja X_2 , sillä on olemassa käänteisfunktio näillä väleillä. Määritellään $F_1, F_2 : X \rightarrow X$ funktion f käänteisfunktion osina asettamalla

$$F_1(x) = f^{-1}(x) \cap X_1 \text{ ja } F_2(x) = f^{-1}(x) \cap X_2.$$

Kuvaukset F_1 ja F_2 antavat kuvauksen f alkukuvan $X_1 \cup X_2$. Funktiot F_1 ja F_2 kuvautuvat bijektiivisesti joukkoihin X_1 ja X_2 , joten niille on olemassa käänteiskuvaukset. Tällöin f voidaan vastaavasti kirjoittaa funktioiden F_1 ja F_2 käänteifunktioiden avulla:

$$f(x) = \begin{cases} F_1^{-1}(x) & \text{kun } x \in X_1 \\ F_2^{-1}(x) & \text{kun } x \in X_2. \end{cases}$$

Joukon E invarianttiuden nojalla $E = f^{-1}(E) = F_1(E) \cup F_2(E)$. Koska funktiolla f on jatkuva derivaatta, jolla $|f'(x)| > 1$ kompaktilla välillä $X_1 \cup X_2$, on olemassa luvut sellaiset luvut $0 < c_{\min} \leq c_{\max} < 1$, että $1 < c_{\max}^{-1} \leq |f'(x)| \leq c_{\min}^{-1} < \infty$ aina, kun $x \in X_1 \cup X_2$. Tästä seuraa, että käänteisfunktiot F_1 ja F_2 ovat derivoituvia rajoilla $c_{\min} \leq |F_1'(x)|, |F_2'(x)| \leq c_{\max}$ aina, kun $x \in X$. Differentiaalilaskennan väliarvolauseen nojalla kaikille $i = 1, 2$

$$c_{\min}|x - y| \leq |F_i(x) - F_i(y)| \leq c_{\max}|x - y| \quad (x, y \in X).$$

Koska $c_{\max} < 1$, kuvaukset F_1 ja F_2 ovat kontraktioita. Aiemmin todettiin, että $E = F_1(E) \cup F_2(E)$, joten E on lauseen 2.10 mukainen iteroidun funktiosysteemin $\{F_1, F_2\}$ yksikäsitteinen attraktori. Siis iteroidun funktiosysteemin

$\{F_1, F_2\}$ attraktori vastaa dynaamisen systeemin repelleriä eli nämä kaksi esitustapaa muodostavat saman keksinleikkausjoukon.

Huomautus 3.2. Kuten iteroituja funktiosysteemejä, myös keksinleikkauksia voidaan merkitä indeksijonojen $I_k = \{(i_1, \dots, i_k) : i_j = 1 \text{ tai } 2\}$ avulla. Koska rajasimme määrittelyn vain kahden funktion muodostamiin systeemeihin, muodostuvat indeksijonot nyt luvuista yksi ja kaksi. Indeksijonojen avulla merkitään

$$X_i = X_{i_1, \dots, i_k} = F_{i_1} \circ \dots \circ F_{i_k}(X).$$

Valitsemalla pisteiksi x ja y välin päätepisteet $c_{\min}|x - y| \leq |F_i(x) - F_i(y)| \leq c_{\max}|x - y|$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$c_{\min} \text{diam}(X_{\mathbf{i}}) \leq \text{diam}(X_{\mathbf{i},i}) \leq c_{\max} \text{diam}(X_{\mathbf{i}}).$$

Esimerkissä 2.11 muodostettiin Cantorin joukko käyttäen iteroitua funktiosysteemiä. Muodostetaan nyt Cantorin joukko käyttäen määritelmän 3.1 mukaista dynaamista systeemiä f ja sitä vastaavaa iteroitua funktiosysteemiä.

Esimerkki 3.3. Olkoon kuvaus $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{3}{2}(1 - |2x - 1|).$$

Määritellään iteroitu funktiosysteemi, joka muodostuu kuvauksista $F_1, F_2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, missä

$$F_1(x) = \frac{1}{3}x, \quad F_2(x) = 1 - \frac{1}{3}x.$$

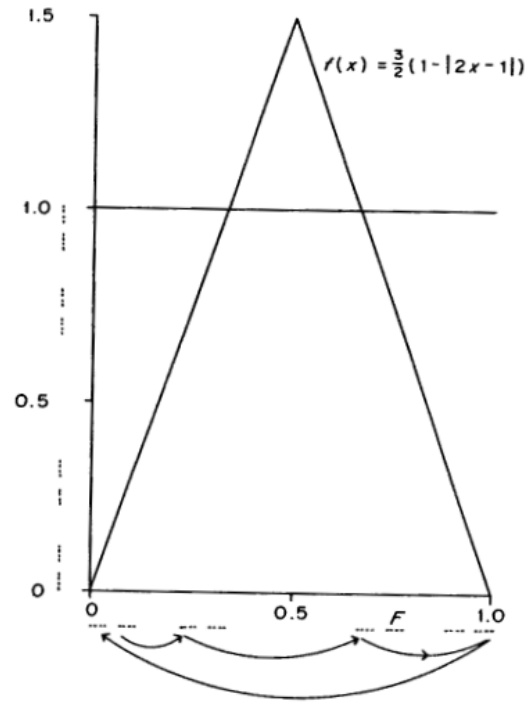
Huomataan, että F_1 ja F_2 ovat käänteisfunktion f^{-1} kaksi osaa, sillä

$$f(F_1(x)) = f(F_2(x)) = x, \text{ kun } x \in [0, 1].$$

Koska kuvaukset F_1 ja F_2 ovat kutistavia, lauseen 2.10 nojalla iteroidulla funktiosysteemillä $\{F_1, F_2\}$ on attraktori E , jolle

$$E = F_1(E) \cup F_2(E), \text{ missä } E = \bigcap_{k=1}^{\infty} F^k([0, 1]).$$

Tällöin joukko E on invariantti myös kuvauksen f suhteen eli $E = f(E)$. Edelleen E on funktion f repelleri, sillä jos $x \notin E$, niin $f^k(x) \rightarrow -\infty$, kun $k \rightarrow \infty$. Attraktori E vastaa Cantorin joukkoa.



Kuva 3: Kuvaus f ja sen repelleri, joka muodostaa Cantorin joukon. Kuvaus on rajoitettu välille $[0, 1]$, jolloin $|f'(x)| > 1$ kuten määritelmässä 3.4 oletettiin. Alkuperäinen kuva [2, Figure 13.1]

Yksinkertaiset iteroidut funktiosysteemit muodostuvat similaarikuvauksista, jolloin muodostuvan joukon sanotaan olevan itsesimilaarinen. Tällöin joukossa toistuu sama kuvio pienemmässä mittakaavassa kuten Cantorin joukossa esimerkeissä 2.11 ja 3.3.

Keksinleikkauksissa olemme erityisesti kiinnostuneet tilanteista, joissa funktiosysteemin kuvaukset eivät ole similaarisia. Tällöin muodostuvan joukon E voidaan ajatella olevan vääristynyt Cantorin joukko, joka on approksimoidusti itsesimilaarinen. Seuraavassa osiossa tarkastellaan rajoitetun heilahte-

lun periaatetta keksinleikkauksuvauksille, joka kertoo tarkemmin approksimoidusta itsesimilaarisuudesta.

Esimerkki 3.4. Olkoon $F_1, F_2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, missä

$$F_1(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{10}x^2, \quad F_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} - \frac{1}{10}x^2.$$

Osoitetaan, että kuvaukset ovat kontraktioita. Kuvaukselle F_1 saadaan

$$\begin{aligned} |F_1(x) - F_1(y)| &= \left| \frac{1}{3}x + \frac{1}{10}x^2 - \left(\frac{1}{3}y + \frac{1}{10}y^2 \right) \right| = \left| \frac{1}{3}(x - y) + \frac{1}{10}(x^2 - y^2) \right| \\ &= \left| \frac{1}{3}(x - y) + \frac{1}{10}(x - y)(x + y) \right| = \left| \frac{1}{3} + \frac{1}{10}(x + y) \right| |x - y| \\ &\leq \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{10} \right) |x - y|. \end{aligned}$$

Siis kontraktiovakiolla $r = \frac{1}{3} + \frac{2}{10} < 1$ pätee $|F_1(x) - F_1(y)| \leq r|x - y|$ aina, kun $x, y \in [0, 1]$, joten kuvaus F_1 on kontraktio. Vastaavasti kuvaukselle F_2

$$\begin{aligned} |F_2(x) - F_2(y)| &= \left| \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} - \frac{1}{10}x^2 - \left(\frac{1}{3}y + \frac{2}{3} - \frac{1}{10}y^2 \right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{3}(x - y) - \frac{1}{10}(x^2 - y^2) \right| = \left| \frac{1}{3}(x - y) - \frac{1}{10}(x - y)(x + y) \right| \\ &= \left| \frac{1}{3} - \frac{1}{10}(x + y) \right| |x - y| \leq \frac{1}{3} |x - y|. \end{aligned}$$

Nyt kontraktiovakiolla $r = \frac{1}{3} < 1$ pätee $|F_2(x) - F_2(y)| \leq r|x - y|$ aina, kun $x, y \in [0, 1]$, joten myös kuvaus F_2 on kontraktio.

Nyt funktiot eivät ole similaarisia, mutta funktiosysteemin $\{F_1, F_2\}$ määräämän attraktorin E voidaan ajatella olevan epälineaarinen Cantorin joukko.

3.2 Rajoitettu heilahtelu

Kuten edellisessä osiossa todettiin, haluamme erityisesti tutkia keksinleikkauksuvauksia, joiden muodostamat fraktaalit eivät ole itsesimilaarisia. Itsesimilaarisuudesta seuraa kuitenkin useita näiden fraktaalien ominaisuuksia

kuten dimensio. Tarvitsemme siis jotain arvioita keksinleikkauksuvauksen similaarisuudesta. Todistetaan tässä osiossa rajoitetun heilahtelun periaate, jonka antamaa arviota käytetään myöhemmin keksinleikkauksuvauksen paineen todistamiseen.

Määritellään ensiksi funktio ϕ ja sen summafunktio $S_k\phi(x)$

Määritelmä 3.5. Olkoon $\phi : X_1 \cup X_2 \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-kuvaus, jolloin se toteuttaa ehdon

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq a|x - y| \quad (x, y \in X_1 \cup X_2),$$

jollakin $a > 0$.

Muodostetaan summa perättäisten iterointien arvoista asettamalla

$$S_k\phi(x) \equiv \phi(x) + \phi(f(x)) + \phi(f^2(x)) + \dots + \phi(f^{k-1}(x)) = \sum_{j=0}^{k-1} \phi(f^j x).$$

Todistetaan nyt rajoitetun heilahtelun periaate, joka osoittaa, että summat $S_k\phi(x)$ eivät vaihtelee paljoa eri arvoilla x .

Lause 3.6. Olkoon $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz kuvaus.

a) On olemassa sellainen luku b , että kaikille $k = 1, 2, \dots$ ja kaikille $(i_1, \dots, i_k) \in I_k$ pätee

$$|S_k\phi(x) - S_k\phi(y)| \leq b$$

aina, kun $x, y \in X_{i_1, \dots, i_k}$.

b) Yleisemmin kaikille $q \geq k$ ja kaikille $(i_1, \dots, i_q) \in I_q$

$$|S_k\phi(x) - S_k\phi(y)| \leq b(\text{diam}(X))^{-1} \text{diam}(X_{i_{k+1}, \dots, i_q})$$

aina, kun $x, y \in X_{i_1, \dots, i_q}$.

Todistus. a) Käyttämällä huomautusta 3.2 toistuvasti saadaan

$$\text{diam}(X_{i_1, \dots, i_k}) \leq c_{\max}^k \text{diam}(X)$$

kaikille $(i_1, \dots, i_k) \in I$.

Jos $x, y \in X_{i_1, \dots, i_k}$, niin $f^j x, f^j y \in X_{i_{j+1}, \dots, i_k}$ kaikilla $j = 0, 1, \dots, k-1$. Käyttämällä tietoa, että ϕ on Lipschitz-kuvaus, ja yllä esitettyä arviota saadaan

$$|\phi(f^j x) - \phi(f^j y)| \leq a|f^j x - f^j y| \leq a \operatorname{diam}(X_{i_{j+1}, \dots, i_k}) \leq ac_{max}^{k-j} \operatorname{diam}(X).$$

Nyt voidaan arvoida summia

$$\begin{aligned} |S_k \phi(x) - S_k \phi(y)| &= \left| \sum_{j=0}^{k-1} \phi(f^j x) - \sum_{j=0}^{k-1} \phi(f^j y) \right| \leq \sum_{j=0}^{k-1} |\phi(f^j x) - \phi(f^j y)| \\ &\leq \sum_{j=0}^{k-1} ac_{max}^{k-j} \operatorname{diam}(X) \leq ac_{max}(\operatorname{diam}(X))/(1 - c_{max}). \end{aligned}$$

Asetetaan $b = ac_{max}(\operatorname{diam}(X))/(1 - c_{max})$, jolloin väite a) on voimassa.

b) Vastaavasti kuten a) -kohdassa, huomautuksen 3.2 nojalla

$$\operatorname{diam}(X_{i_1, \dots, i_q}) = \operatorname{diam}(F_{i_1} \circ \dots \circ F_{i_q}(X)) \leq c_{max}^k \operatorname{diam}(F_{i_{k+1}} \circ \dots \circ F_{i_q}(X))$$

kaikille $(i_1, \dots, i_q) \in I$.

Jos $x, y \in X_{i_1, \dots, i_q}$, niin $f^j x, f^j y \in X_{i_{j+1}, \dots, i_q}$ kaikilla $j = 0, 1, \dots, q-1$, jolloin

a) -kohdan tavoin

$$|\phi(f^j x) - \phi(f^j y)| \leq a|f^j x - f^j y| \leq a \operatorname{diam}(X_{i_{j+1}, \dots, i_q}) \leq ac_{max}^{k-j} \operatorname{diam}(X_{i_{k+1} \dots i_q}).$$

Käyttämällä a) -kohdan tulosta saadaan

$$\begin{aligned} |S_k \phi(x) - S_k \phi(y)| &= \left| \sum_{j=0}^{k-1} \phi(f^j x) - \sum_{j=0}^{k-1} \phi(f^j y) \right| \leq \sum_{j=0}^{k-1} |\phi(f^j x) - \phi(f^j y)| \\ &\leq \sum_{j=0}^{k-1} ac_{max}^{k-j} \operatorname{diam}(X_{i_{k+1} \dots i_q}) \leq ac_{max}(\operatorname{diam}(X_{i_{k+1} \dots i_q}))(1 - c_{max}) \\ &= b(\operatorname{diam}(X))^{-1} \operatorname{diam}(X_{i_{k+1} \dots i_q}). \end{aligned}$$

Siis väite b) pätee. □

Seuraus 3.7. *Eksponenttien avulla a) -kohdan väite voidaan kirjoittaa myös muodossa*

$$e^{-b} \leq \frac{\exp(S_k \phi(x))}{\exp(S_k \phi(y))} \leq e^b$$

aina, kun $x, y \in X_{i_1, \dots, i_k}$.

Enemmän tietoa keksinleikkausjoukon itsesimilaarisuudesta saataisiin jatkamalla tästä kiinnittämällä Lipschitz kuvaus ϕ tavalla, joka kuvaa joukon geometriaa. Paineessa käsittelemme kuitenkin vain yleistä Lipschitz kuvasta, joten tämä arvio on riittävä.

4 Paine

Tässä osiossa todistetaan keksinleikkauskuvauksen paineen olemassaolo. Käsitteenä paine on osa dynaamisten systeemien yhteydessä käytettävää termodynaamista formalismia, jossa käytetään termodynaamisia käsitteitä kuten paine tai entropia yleisemmin. Tämä on seurausta siitä, että teoria on kehitetty pitkälti statistisen mekaniikan kontekstissa, mutta se on osoittautunut hyödylliseksi myös dynaamisten systeemien ja iteroitujen funktiosysteemien tutkimuksessa. Paineen avulla saadaan tietoa keksinleikkauskuvauksen attraktorin rakenteesta ja sen avulla voidaan laskea esimerkiksi attraktorin dimensio.

Käsitellään keksinleikkauskuvausta f , kuten määriteltiin osiossa 3.1. Lisäksi tarvitaan Lipschitz kuvaus ϕ ja määritelmän 3.5 mukainen summa $S_k \phi(x)$, joka toteuttaa lauseen 3.6 eli on rajoitetusti heilahteleva. Keksinleikkauskuvauksen paine $P(\phi)$ on raja-arvo:

$$P(\phi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \sum_{i \in I_k} \exp S_k \phi(x_i)$$

Ennen paineen olemassaolon todistamista osoitetaan subadditiivisille jonoille kaksi lemmaa, joita tarvitaan todistuksessa.

Määritelmä 4.1. Reaalilukujono $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ on subadditiivinen, jos se toteuttaa epäyhtälön

$$a_{k+m} \leq a_k + a_m$$

kaikilla $k, m \in \mathbb{Z}^+$.

Lemma 4.2. Olkoon $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ subadditiivinen jono. Tällöin raja-arvo $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k/k$ on olemassa ja

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{k} = \inf_{k \geq 1} \frac{a_k}{k}.$$

Todistus. Olkoon m positiivinen kokonaisluku. Tällöin mikä tahansa kokonaisluku k voidaan kirjoittaa muodossa $k = qm + r$, missä $q, r \in \mathbb{Z}$ ja $0 \leq r < m$. Nyt koska $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ on subadditiivinen jono, käyttämällä määritelmän 4.1 epäyhtälöä q kertaa saadaan

$$\frac{a_k}{k} = \frac{a_{qm+r}}{qm+r} \leq \frac{qa_m + a_r}{qm} = \frac{a_m}{m} + \frac{a_r}{qm}.$$

Kun $k \rightarrow \infty$, myös $q \rightarrow \infty$, jolloin

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{k} \leq \frac{a_m}{m}.$$

Tämä pätee kaikille $m \in \mathbb{Z}^+$, joten $\limsup_{k \rightarrow \infty} a_k/k \leq \inf_k a_k/k \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} a_k/k$.

Siis $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k/k = \inf_k a_k/k$. \square

Lemma 4.3. Olkoon b sellainen reaaliluku, että $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ toteuttaa epäyhtälön

$$a_{k+m} \leq a_k + a_m + b$$

kaikilla $k, m = 1, 2, \dots$. Tällöin $a \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} a_k/k$ on olemassa ja $a_k \geq ka - b$ kaikilla k .

Todistus. Oletuksen nojalla

$$(a_{k+m} + b) \leq a_k + a_m + 2b \leq (a_k + b) + (a_m + b).$$

Nyt $(a_k + b)_{k=1}^{\infty}$ on subadditiivinen jono, jolloin lemmän 4.2 nojalla

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k + b}{k} = \inf_{k \geq 1} \frac{a_k + b}{k}.$$

Merkitään raja-arvoa a , jolloin

$$a \leq \frac{a_k + b}{k} \Rightarrow a_k \geq ka - b.$$

□

Todistetaan nyt paineen olemassaolo. Todistuksessa ajatuksena on näyttää lauseen 3.6 avulla, että summien $\sum_{\mathbf{i} \in I_k} \exp S_k \phi(x_{\mathbf{i}})$ muodostama jono on täyttää lemmän 4.3 oletuksen. Tällöin lemmän nojalla raja-arvo on olemassa.

Lause 4.4. *Olkoon $x_{\mathbf{i}} \in X_{\mathbf{i}}$ kaikille k ja $\mathbf{i} \in I_k$ sekä ϕ Lipschitz kuvaus. Tällöin raja-arvo*

$$P(\phi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \sum_{\mathbf{i} \in I_k} \exp S_k \phi(x_{\mathbf{i}})$$

on olemassa eikä riipu arvoista $x_{\mathbf{i}} \in X_{\mathbf{i}}$.

Todistus. Olkoon $w \in E$. Summan $S_k \phi(x)$ määritelmän nojalla

$$S_{k+m} \phi(x) = \sum_{j=0}^{k+m-1} \phi(f^j x) = \sum_{j=0}^{k-1} \phi(f^j x) + \sum_{l=0}^{m-1} \phi(f^l(f^k x)) = S_k \phi(x) + S_m \phi(f^k x)$$

kaikilla $k, m = 1, 2, \dots$. Ottamalla tästä eksponentti ja summaamalla saadaan

$$\begin{aligned} \sum_{x: f^{k+m} x = w} \exp S_{k+m} \phi(x) &= \sum_{x: f^{k+m} x = w} \exp(S_k \phi(x) + S_m \phi(f^k x)) \\ &= \sum_{x: f^{k+m} x = w} \exp(S_k \phi(x)) \exp(S_m \phi(f^k x)) \\ &= \sum_{z: f^m z = w} \sum_{x: f^k x = z} \exp(S_k \phi(x)) \exp(S_m \phi(f^k x)) \\ &= \sum_{z: f^m z = w} \exp(S_m \phi(z)) \sum_{x: f^k x = z} \exp(S_k \phi(x)). \end{aligned}$$

Seurauksen 3.7 nojalla voidaan arvioida

$$\sum_{z: f^m z = w} \exp(S_m \phi(z)) \sum_{x: f^k x = z} \exp(S_k \phi(x)) \leq e^b \sum_{z: f^m z = w} \exp(S_m \phi(z)) \sum_{y: f^k y = w} \exp(S_k \phi(y))$$

aina, kun $y_{\mathbf{i}} = F_{i_1} \circ \dots \circ F_{i_k}(w) \in X_{\mathbf{i}}$ ja $x_{\mathbf{i}} = F_{i_1} \circ \dots \circ F_{i_k}(z) \in X_{\mathbf{i}}$. Vastaavasti voidaan arvioida alaspäin

$$\sum_{z: f^m z = w} \exp(S_m \phi(z)) \sum_{x: f^k x = z} \exp(S_k \phi(x)) \geq e^{-b} \sum_{z: f^m z = w} \exp(S_m \phi(z)) \sum_{y: f^k y = w} \exp(S_k \phi(y)),$$

aina, kun $y_{\mathbf{i}} = F_{i_1} \circ \dots \circ F_{i_k}(w) \in X_{\mathbf{i}}$ ja $x_{\mathbf{i}} = F_{i_1} \circ \dots \circ F_{i_k}(z) \in X_{\mathbf{i}}$.

Merkitään

$$s_k = \sum_{x: f^k x = w} \exp(S_k \phi(x)),$$

jolloin yllä johdetut epäyhtälöt voidaan kirjoittaa muotoon

$$e^{-b} s_k s_m \leq s_{k+m} \leq e^b s_k s_m.$$

Otetaan tästä epäyhtälöstä logaritmit ja merkitään $a_k = \log s_k$, jolloin

$$\begin{aligned} \log(e^{-b} s_k s_m) &\leq \log(s_{k+m}) \leq \log(e^b s_k s_m) \\ \Rightarrow \log(s_k) + \log(s_m) - b &\leq \log(s_{k+m}) \leq \log(s_k) + \log(s_m) + b \\ \Rightarrow a_k + a_m - b &\leq a_{k+m} \leq a_k + a_m + b. \end{aligned}$$

Nyt lemmän 4.3 nojalla raja-arvo $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log s_k$ on olemassa eli

$$P(\phi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \sum_{\mathbf{i} \in I_k} \exp S_k \phi(x_{\mathbf{i}})$$

on olemassa, kun $x_{\mathbf{i}} = F_{i_1} \circ \dots \circ F_{i_k}(w)$ kaikilla $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_k)$.

Osoitetaan seurauksen 3.7 avulla, että paine ei riipu valitusta $x_{\mathbf{i}} \in X_{\mathbf{i}}$.

Olkoon $y_{\mathbf{i}} \in X_{\mathbf{i}}$, jolloin seurauksen 3.7 nojalla

$$\begin{aligned}
& \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \sum_{\mathbf{i} \in I_k} e^{-b} \exp S_k \phi(y_{\mathbf{i}}) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \sum_{\mathbf{i} \in I_k} \exp S_k \phi(x_{\mathbf{i}}) \\
& \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \sum_{\mathbf{i} \in I_k} e^b \exp S_k \phi(y_{\mathbf{i}}) \\
& \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k} \log e^{-b} + \frac{1}{k} \log \sum_{\mathbf{i} \in I_k} \exp S_k \phi(y_{\mathbf{i}}) \right) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \sum_{\mathbf{i} \in I_k} \exp S_k \phi(x_{\mathbf{i}}) \\
& \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k} \log e^b + \frac{1}{k} \log \sum_{\mathbf{i} \in I_k} \exp S_k \phi(y_{\mathbf{i}}) \right) \\
& \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{-b}{k} + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \sum_{\mathbf{i} \in I_k} \exp S_k \phi(y_{\mathbf{i}}) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \sum_{\mathbf{i} \in I_k} \exp S_k \phi(x_{\mathbf{i}}) \\
& \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b}{k} + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \sum_{\mathbf{i} \in I_k} \exp S_k \phi(y_{\mathbf{i}}).
\end{aligned}$$

Koska $\lim_{k \rightarrow \infty} -b/k = \lim_{k \rightarrow \infty} b/k = 0$, saadaan

$$\begin{aligned}
& \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \sum_{\mathbf{i} \in I_k} \exp S_k \phi(y_{\mathbf{i}}) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \sum_{\mathbf{i} \in I_k} \exp S_k \phi(x_{\mathbf{i}}) \\
& \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \sum_{\mathbf{i} \in I_k} \exp S_k \phi(y_{\mathbf{i}}),
\end{aligned}$$

joten täytyy olla

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \sum_{\mathbf{i} \in I_k} \exp S_k \phi(x_{\mathbf{i}}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \sum_{\mathbf{i} \in I_k} \exp S_k \phi(y_{\mathbf{i}}).$$

Siis paine on sama arvoilla $x_{\mathbf{i}}, y_{\mathbf{i}} \in X_{\mathbf{i}}$, joten se ei riipu arvojen $x_{\mathbf{i}} \in X_{\mathbf{i}}$ valinnasta. \square

Huomautus 4.5. Koska $F_{i_1} \circ \dots \circ F_{i_k} : X \rightarrow X_{\mathbf{i}} \subset X$ on kontraktio, on olemassa yksikäsitteiset pisteet $x_{\mathbf{i}} \in X_{\mathbf{i}}$, jolle $x_{\mathbf{i}} = F_{i_1} \circ \dots \circ F_{i_k}(x_{\mathbf{i}})$ tai vastaavasti $x_{\mathbf{i}} = f^k(x_{\mathbf{i}})$ Siis pisteiksi voidaan valita dynaamisen systeemin f^k kiintopisteet, joiden joukkoa merkitään $\text{Fix } f^k$. Tällöin paine voidaan kirjoittaa muodossa

$$P(\phi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \sum_{x \in \text{Fix } f^k} \exp S_k \phi(x).$$

Esimerkki 4.6. Lasketaan paine esimerkin 3.3 dynaamiselle systeemille $f(x) = \frac{3}{2}(1 - |2x - 1|)$. Kirjoitetaan dynaaminen systeemi paloittain määriteltynä:

$$f(x) = \frac{3}{2}(1 - |2x - 1|) = \begin{cases} 3x & \text{kun } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 3 - 3x & \text{kun } x \in]\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Siis k :nnen iteroinnin derivaatan itseisarvo on $|(f^k)'(x)| = 3^k$. Lisäksi tiedetään, että systeemillä on 2^k kiintopistettä. Valitaan kuvaus $\phi(x) = -\log |f'(x)|$. Koska $|f'(x)| = |f'(y)| = 3$ aina, kun $x, y \in [0, 1]$, saadaan

$$|\phi(x) - \phi(y)| = |-\log |f'(x)| + \log |f'(y)|| = |-\log(3) + \log(3)| = 0.$$

Siis kuvaus ϕ toteuttaa Lipschitz-ehdon aina, kun $x, y \in [0, 1]$. Derivaatan ketjusäännön nojalla

$$(f^k)'(x) = f'(f^{k-1}(x)) \cdot f'(f^{k-2}(x)) \cdot \dots \cdot f'(x),$$

jolloin saadaan

$$\begin{aligned} -\log |(f^k)'(x)| &= -\log |f'(f^{k-1}(x)) \cdot f'(f^{k-2}(x)) \cdot \dots \cdot f'(x)| \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} -\log |f'(f^j x)| = \sum_{j=0}^{k-1} \phi(f^j x) = S_k \phi(x). \end{aligned}$$

Nyt voidaan laskea paine

$$\begin{aligned} P(-\log(|f'(x)|)) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \sum_{x \in \text{Fix } f^k} \exp S_k \phi(x) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \sum_{x \in \text{Fix } f^k} \exp(-\log |(f^k)'(x)|) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \sum_{x \in \text{Fix } f^k} \frac{1}{|(f^k)'(x)|} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \sum_{x \in \text{Fix } f^k} \frac{1}{3^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \left(\frac{2}{3} \right)^k = \log \left(\frac{2}{3} \right). \end{aligned}$$

Lähdeluettelo

- [1] G. Edgar: *Measure, Topology and Fractal Geometry*. Springer, New York, 1990.
- [2] K. Falconer: *Fractal geometry: Mathematical foundations and applications*. John Wiley & Sons, Chichester, 1990.
- [3] K. Falconer: *Techniques in fractal geometry*. John Wiley & Sons, Chichester, 1997.
- [4] G. Helmberg: *Getting Acquainted With Fractals*. De Gruyter, Berlin, 2008.